ÚLOHY DOMÁCÍHO KOLA
56. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

KATEGORIE A

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

víte-li, že má čtyři různé reálné kořeny, přičemž součet dvou z nich je roven číslu 1.

(Jaromír Šimša)

2. Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech K, L, M. Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK. Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné. *(Peter Novotný)*

3. Jsou-li x, y, z reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ splňující podmínku $xy + yz + zx = 1$, pak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \le 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. *(Jaroslav Švrček)*

4. Určete, pro která přirozená čísla n je možno množinu $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ rozdělit
a) na dvě, b) na tři
navzájem disjunktní podmnožiny o stejném počtu prvků tak, aby každá z nich obsahovala také aritmetický průměr všech svých prvků. *(Peter Novotný)*

5. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \ne S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k. *(Jiří Dula)*

6. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = x + f(y + 2\,006).$$

(Petr Kaňovský)

KATEGORIE B

1. Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(Pavel Novotný)

2. Je dána kružnice k s průměrem AB. K libovolnému bodu Y kružnice k, $Y \ne A$, sestrojme na polopřímce AY bod X, pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X.

(Pavel Leischner)

3. Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že každá k-prvková množina trojmístných po dvou nesoudělných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo. *(Pavel Novotný)*

4. V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB, pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový. (*Ján Mazák*)

5. Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$. (*Jozef Moravčík*)

6. Je dána úsečka AA_0 a přímka p. Sestrojte trojúhelník s vrcholem A a výškou AA_0, jehož těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce p. (*Eva Řídká*)

KATEGORIE C

1. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm. (*Ján Mazák*)

3. Najděte všechna přirozená čísla, jejichž zápis neobsahuje nulu a má následující vlastnost: vynecháme-li v něm libovolnou číslici, dostaneme číslo, které je dělitelem původního čísla. (*Jaromír Šimša*)

4. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme E střed strany AB, F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE. Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A, F, C leží v přímce. (*Ján Mazák*)

5. Zjistěte, pro které přirozené číslo n je podíl

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) co největší, b) co nejmenší přirozené číslo. (*Eva Řídká*)

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž D je pata výšky z vrcholu C a V průsečík výšek. Dokažte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$, právě když $|CD| = |AB|$. (*Jaroslav Zhouf*)